MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Hubert Lacoin, Matthieu Lerasle

Coefficient : 3

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Commentaires généraux

Le sujet était composé de trois exercices indépendants. Il proposait comme chaque année aux candidats des questions de difficultés variées et balayait une large part du programme. L'exercice 1 était un exercice d'algèbre linéaire. L'exercice 2 était un problème divisé en 3 parties. Les deux premières étaient des rappels courts d'analyse et de probabilité, la troisième constituait le corps de l'exercice et proposait une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass. L'exercice 3 était un exercice plus original d'analyse.

Une attention particulière avait été portée à la progressivité du sujet lors de sa conception. Comme les années précédentes, nous avons groupé les questions en quatre niveaux de difficulté :

(1) questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : 1.1, 1.3, 2.1, 2.2, 2.4 3.1–3. En les résolvant intégralement, on obtenait 13/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait 9/20 (le barême n'est pas linéaire, les premiers points étant plus faciles à obtenir).

(2) questions d'application du cours classiques, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : 1.2, 1.4, 2.5, 2.11, 3.4.a) En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 16.5/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait 12/20.

(3) raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : 1.5, 1.7, 2.6–10, 2.13, 3.5.a)c). En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 19.5/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait 17.5/20.

(4) raisonnements plus fins et questions difficiles : 1.6, 2.12, 2.14, 3.4.b), 3.5.b) d).

Plusieurs copies ont abordé avec succès un grand nombre de questions, à la grande satisfaction du jury. Ces candidats seront d'excellents élèves en mathématiques pour les différentes écoles de la banque.

L'exercice 3, plus original, a également permis à des candidats moins à l'aise en calcul de s'exprimer dans cette épreuve. Nous avons ainsi vu avec plaisir certaines copies qui paraissaient faibles terminer avec des notes tout à fait correctes.

Le niveau des copies reste toutefois extrêmement varié, ce dont témoigne l'écart-type des notes (4,8). En particulier, presque 20% de copies sont pratiquement vides (note inférieure ou égale à 3,5/20). Pour obtenir 4/20, il suffisait pourtant par exemple de déterminer le rang de la matrice F_3 à la question 1.1.

Notre sentiment à l'issue de la correction est que le niveau moyen des copies était assez semblable cette année à l'année dernière, la moyenne générale est d'ailleurs assez stable (8,51 contre 8,67).

TABLE 1. Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2013 et 2014. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies "vides" sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

	2013		2014	
Candidats présents	653		708	
Copies blanches	2	(0,3%)	4	(0,6%)
Copies vides	12	(1,8%)	76	(10,7%)
Notes entre 0 et 1,5	25	(3,8%)	94	(13,3%)
Notes entre 0,5 et 4,5	140	(21,4%)	76	(10,7%)
Notes entre 10 et 20	271	(41,5%)	311	(43,9%)
Notes entre 16 et 20	34	(5,2%)	51	(7,2%)
Moyenne	8.67		8,51	
Écart-type	4,30		4,83	
Médiane	8.5		8,5	
Moyenne hors zéros	8,86		9,53	
Écart-type hors zéros	4,15		4,05	
Médiane hors zéros	9		9	
Moyenne des notes $\geqslant 4$	9,80		10,3	
Écart-type des notes $\geqslant 4$	3,6		3,5	
Médiane des notes $\geqslant 4$	9,5		10	

Le Tableau 1 permet d'affiner ce constat. La principale évolution s'est produite parmi les copies les plus faibles. Le nombre de copies blanches ou vides a fortement augmenté, ainsi que les copies ayant obtenu une note inférieure ou égale à 1,5/20 revenant à son niveau de 2012 (94 en 2014 contre 25 en 2013, et 87 en 2012, alors que le nombre de candidats a augmenté). En revanche, parmi les copies ayant obtenu plus de 4/20, les notes ont légèrement progressé, la moyenne de ces candidats par exemple passant de 9,8 à 10,3.

Cette évolution peut s'expliquer d'abord par les questions les plus faciles, celles de 2013 étant légèrement plus simples que celles de cette année. Il suffisait en effet alors d'élever une matrice $3 * 3$ au carré puis au cube pour obtenir 2/20. Parmi les meilleures notes, il semble que les candidats ont pu avancer un peu mieux dans les problèmes cette année, notamment dans l'exercice 2.

L'analyse de la réussite aux questions de niveau 1 (voir Tableau 2) met également en évidence des différences entre algèbre linéaire, analyse et probabilités.

Les deux questions les mieux réussies sont 1.1 et 2.4. Elles permettent de voir que les candidats connaissent en général les bases de l'algèbre linéaire et des probabilités.

À l'inverse, la question d'analyse 2.1 a été moins bien traitée. En particulier, beaucoup de candidats n'ont même pas essayé de tracer l'allure du graphe de la fonction, même parmi ceux qui avaient obtenu un tableau de variation correct. Ceci est particulièrement décevant car la fonction à étudier était une fonction classique dont l'étude ne présentait aucune difficulté particulière. Les futurs candidats peuvent s'attendre à revoir ce type de questions très standards parmi les questions de niveau 1 en analyse dans les années qui viennent. En particulier, nous ferons tracer des graphes aussi souvent que possible.

TABLE 2. Éléments statistiques de réussite aux questions de difficulté 1. Chaque question est notée sur 4. La note 0 est attribuée aux candidats ayant tenté sans succès de répondre à la question.

Question/Note	0	1	2	3 ou 4
1.1	117	170	73	285
2.1 (tableau de variation)	205	179	49	192
2.1 (graphe)	200	17	38	133
2.4	84	52	99	291

Pour conclure, nous renouvelons nos avertissements à l'intention des futurs candidats : il est nécessaire fournir un travail minimal en mathématiques afin de résoudre et rédiger correctement toute question de cours ou calcul numérique élémentaire (au moins). Ce travail minimal est en général récompensé largement, même pour les candidats les moins à l'aise en mathématiques à l'arrivée en classe préparatoire. Cela permettait cette année encore d'obtenir jusqu'à 13/20 à l'écrit de mathématiques et de dépasser ainsi largement le niveau médian.

En revanche, il nous semble difficile de réussir sans cet investissement. Ainsi, parmi les 248 sous-admissibles à l'ENS de Paris, 8 ont obtenu moins de 7/20, parmi les 61 admissibles, 4 ont obtenu une note de 10/20 ou moins, 12 ont obtenu moins de 13 ; la moyenne des admis se situe à 15,4.

Avant de rentrer dans le détail des exercices, nous renouvelons ces quelques conseils donnés l'an dernier déjà aux candidats pour la rédaction de leur copie :

— L'épreuve de mathématiques n'est pas un concours de vitesse, mais exige rigueur et précision. Il importe donc d'accorder la plus grande attention à la rédaction des questions simples du début de chaque exercice pour ne pas y perdre de points, en particulier pour les candidats les moins à l'aise en mathématiques. Il est toujours délicat de récupérer ces points sur des questions plus difficiles, où l'on demande notamment de s'être approprié les notations et résultats du sujet.
  Nous détaillons ici les principales attentes du jury quant à la rédaction lors de l'épreuve écrite, ainsi que les erreurs les plus courantes. Une réponse bien rédigée doit montrer *clairement* et *sans ambiguité* au correcteur que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *exacte*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

  (1) Ambiguité : un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambiguité avec un argument totalement faux. Par exemple, à la question 3.1, plusieurs candidats qui ont bien écrit $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ ont perdu des points en disant que f était infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car les fonctions ln et exponentielle l'étaient, il fallait utiliser l'infinie dérivabilité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

  (2) Démonstration complète : il est nécessaire de rappeler toutes les hypothèses lorsqu'on utilise un résultat du cours. Ainsi à la question 2.4, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p car c'est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli *indépendantes* et de *même paramètre* p. L'oubli d'une ou plusieurs de ces 3 hypothèses était sanctionné.
  De plus, il faut *toujours* mentionner un résultat prouvé dans une question précédente lorsqu'on l'utilise. Par exemple, pour la question 2.11, on pouvait utiliser l'espérance

de S_n calculée à la question 2.4 pour calculer celle de $\bar{X}_n$. Tous ceux qui ont simplement affirmer que cette espérance valait p voire qui ont simplement dit qu'ils appliquaient l'indication y ont perdu une partie de points.

(3) Démonstration exacte : certaines hypothèses sont inutiles pour traiter certaines parties d'une question, les mentionner à ce moment jette le doute sur la maîtrise du cours du candidat. Ainsi, à la question 2.2, il est inutile que la fonction soit monotone pour appliquer le théorème des accroissements finis.

(4) Arguments erronés : pire, énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit (par exemple, le rang d'une matrice correspond au nombre de ses colonnes différentes à la question 1.1).

(5) Rédaction/ sténographie : dans de trop nombreuses copies les réponses se résumaient à une succession de symboles sans rédaction. Nous rappelons aux candidats qu'un raisonnement mathématique ne peut se faire sans mots. De même, nous préférons nettement que les candidats écrivent "X suit une loi binômiale de paramètres n et p" plutôt que le sténographique "$X \to \mathcal{B}(n,p)$". Une notation incomprise du correcteur pénalise systématiquement le candidat.

(6) Il peut être informatif et parfois rentable d'étudier plusieurs cas particuliers pour conjecturer une formule générale. En revanche, il est alors premièrement inutile de mettre de longs calculs sur la copie s'ils ne mènent pas à une preuve du résultat demandé. Par exemple, à la question 1.4, il ne servait à rien de calculer complètement les noyaux de G_n pour $n \in \{3,4,5,6\}$ sans proposer une valeur pour la dimension de $\ker(G_n)$ pour n quelconque. De plus, il est indispensable de se méfier d'un résultat ainsi conjecturé. De nombreux candidats ont par exemple pensé que la matrice M_n était diagonale après l'avoir calculée pour $n = 2, 3$, ils ont uniquement déterminé les coefficients diagonaux de cette matrice. Enfin, si on conjecture une formule générale à partir de calculs sur des cas particuliers, il faut vérifier que cette formule est cohérente avec ces derniers. Nous avons ainsi souvent lu $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k)x^{\alpha-k}$ à la question 3.2 dans des copies qui avaient calculé correctement f' et f". En mathématiques, il est plus important de savoir ce que l'on fait que de savoir faire des calculs de manière mécanique, un ordinateur étant nettement plus performant qu'un humain pour le second point.

(7) Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.

— Trop de candidats perdent des points par manque de recul ou par malhonnêteté, les deux ne pouvant se distinguer à l'écrit.
Les futurs candidats ont intérêt à faire l'effort de vérifier la cohérence de leurs résultats et à signaler honnêtement toute incohérence qu'ils n'arrivent pas à corriger sur leur copie. Autant le jury est très magnanime avec un candidat honnête (même s'il aura nécessairement moins de points qu'un candidat ayant une réponse parfaite), autant une tentative d'arnaque ou de bluff (réelle ou supposée) fait très mauvaise impression et a des répercussions négatives sur la notation tout au long de la copie : les moindres ambiguïtés sont alors systématiquement interprétées comme des erreurs.
Au-delà de l'impression laissée sur le jury, en vérifiant la cohérence des résultats, on se donne surtout l'occasion de corriger une erreur de calcul. Parmi les candidats ayant repéré une incohérence, nous voyons la grande majorité finir par corriger leur erreur, et seul un petit nombre se limiter à mentionner qu'ils ont probablement fait

une erreur quelque part.

Par exemple, dans la question 1.3, certains candidats faibles qui ont oublié de vérifier que l'espace qu'ils proposaient étaient inclus dans le noyau ont perdu une bonne occasion de vérifier leurs calculs. À la question 3.2, utiliser la notation $\alpha!$ alors que α n'est pas entier montre un manque de recul. À la question 3.5.c), de nombreux candidats utilisaient à tort que $u_{n+1} = f_{k+1}(n) < 0$ pour montrer que u_n était décroissante, puis affirmaient que u_n était un entier naturel car toujours positif.

Pour encourager les candidats à poursuivre ces efforts, le jury souhaite récompenser plus encore les candidats faisant preuve de recul et d'honnêteté, en ajoutant au barème initial quelques points (autant que pour une question de difficulté moyenne) attribués uniquement en fonction de l'honnêteté et l'absence d'incohérences manifestes au sein de la copie.

— L'erratum ne semble pas avoir perturbé les candidats qui ont dans l'ensemble bien utilisé les indications qui y étaient suggérées. Nous nous excusons d'avoir fait imprimer une version du sujet qui contenait une coquille à la question 2.12, corrigée dans l'erratum.

— L'inégalité des accroissements finis semble mal maîtrisée. En particulier, plusieurs copies l'ont confondu avec le théorème de Rolle. En utilisant cette inégalité, par exemple à la question 2.2, on recherche pour déterminer M un majorant de $|f'|$, pas de f' et encore moins de f. Ce résultat n'est pas valable que pour les fonctions monotones. De même l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef rappelée dans l'erratum ne demande pas que la variable soit positive.

— Lorsque l'on demande une "constante numérique", comme dans les questions 2.2 et 2.12, on attend un nombre réel ne faisant pas intervenir les paramètres libres du problème (par exemple ε à la question 2.12).

— Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire ! Comme chaque année, quelques candidats dont le niveau paraissait assez bon ont perdu des points parce que le jury n'arrivait pas toujours à *lire* les mots et les formules écrites.

— Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points (certaines questions se décomposant en deux parties font apparaître deux numéros), sur un total de 708 copies.

Commentaires détaillés sur chaque exercice

Exercice 1. L'exercice proposait de montrer que $\mathbb{R}^{n+1}$ se décomposait en la somme directe du noyau d'un morphisme représenté par une matrice $G_n \in \mathcal{M}_{n-1,n+1}(\mathbb{R})$ et de l'image d'un morphisme représenté par une matrice $F_n \in \mathcal{M}_{n+1,n-1}(\mathbb{R})$. Ces applications représentaient en réalité respectivement la multiplication par $X^2 + Y^2$ et le Laplacien sur des sous-espaces de $\mathbb{R}[X, Y]$. Cet exercice a été bien réussi par les candidats qui y ont obtenu environ un tiers de leurs points.

Ils ont en général été très perturbés dès que les questions se plaçaient dans le cadre abstrait de matrice dont la taille dépendait d'un entier n général. La question 1.5 a, à ce sujet été particulièrement décevante car très peu de candidats ont su appliquer la formule du produit de matrices.

On pouvait résoudre un grand nombre de question de cet exercice en utilisant la définition du rang d'une matrice rectangulaire et le théorème du rang. Ces deux notions sont plutôt comprises quand les matrices sont données explicitement comme le montrent les questions 1.1 et 1.3, mais sont très mal maîtrisées en général comme en témoignent les questions 1.2 et 1.4.

1. [310 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait dans cette question de montrer que les deux vecteurs colonnes de F_3 formaient une famille libre, ce qui a été globalement bien réussi par les candidats connaissant leur cours.
   Nous avons vu plusieurs candidats appliquer le théorème du rang ici, rappelons que c'est la dimension de l'espace de *départ* de l'application, ici $\mathbb{R}^2$, qui est égale à la somme du rang et de la dimension du noyau de F_3.
   Il est regrettable de ne pas connaître la définition du rang d'une matrice, nous avons vu des copies très faibles le confondre avec le nombre de ses colonnes, le nombre de ses colonnes différentes ou à la somme de ses éléments diagonaux.
2. [110 copies $\geqslant$ 75%] Très peu de candidats ont su ici montrer proprement que la famille des vecteurs colonne de F_n était libre. Les candidats ont très souvent confondu famille libre et famille de vecteurs non colinéaires 2 à 2.
   La notion de famille "étagée" de vecteurs est ambigüe. Il était impossible d'accorder les points au bénéfice du doute aux nombreux candidats l'utilisant sans plus de précisions, étant donné le nombre de copies utilisant par exemple l'argument "les zéros sont étagés". Il était tout aussi rapide ici comme souvent de revenir à la définition pour montrer la liberté de la famille des vecteurs colonnes.
3. [250 copies $\geqslant$ 75%] C'est la seconde question la mieux réussie de l'exercice. La encore, les candidats qui savaient la définition du noyau d'une application linéaire et s'en sont bien sortis.
   Cette question était typique d'une question simple sur laquelle de nombreux candidats ont perdu des points par manque de concentration. Ainsi, il était très dommage, alors qu'on a posé les bonnes équations, de se tromper dans la résolution du système obtenu.
   Autre erreur très classique, on pouvait ici raisonner par équivalence pour obtenir très rapidement la solution. Beaucoup de candidats qui ne l'ont pas fait ont oublié de vérifier que l'espace qu'ils obtenaient était inclus dans le noyau. Plusieurs auraient sûrement alors vu leur erreur de calcul.
4. [40 copies $\geqslant$ 75%] Les candidats ont visiblement été très gênés par cette question qui se résolvait pourtant facilement avec le théorème du rang. Nous avons quand même apprécié quelques très bonnes copies arriver à une preuve très propre. D'autres ont obtenu presque tous les points en posant le système et en remarquant qu'il se résolvait en regroupant les équations en deux groupes.
   A l'inverse, cette question a été celle avec la question 1.2 ou nous avons vu le plus de réponses malhonnêtes que nous avons sanctionnées. En effet, un bon nombre de candidats a lu la question 1.7 et tenté de proposer des formules pour la dimension du noyau de G_n dont la somme avec le rang de F_n donnait $n+1$. Ces "conjectures" sur des questions assez élémentaires sont parfaitement inutiles et deviennent irritantes pour le correcteur lorsqu'elles se répètent sur de nombreuses copies. Nous avons nettement plus apprécié les copies qui ont tenté de répondre honnêtement à ces deux questions et qui, en trouvant une somme des dimensions différente de $n+1$ ont reconnu qu'il devait y avoir une erreur.
5. [17, 425 copies $\geqslant$ 75%] C'est la question la plus décevante de l'épreuve. La seule difficulté était d'appliquer proprement proprement la définition d'un produit matriciel. Heureusement, plus de la moitié des candidats a su donner la bonne dimension pour la matrice M_n.

Les candidats se sont en général bornés ensuite à calculer M_3 et en ont déduit que la matrice M_n était diagonale. C'est finalement sur des copies plus faibles qui ont calculé M_4 que nous avons vu des candidats obtenir la bonne réponse.

6. [1, 46 copies $\geqslant$ 75%] La première partie de la question était la question la plus difficile de l'exercice, que seul un excellent candidat a complètement résolu.
   Quelques candidats qui avaient obtenu une matrice diagonale à la question précédente se sont lancés dans de longues explications à ce moment là pour arriver à la formule de l'énoncé, un autre a directement dit qu'une matrice diagonale était bien semblable à une matrice triangulaire supérieure. Il est dommage que très peu en ait profité pour au moins remarqué qu'ils devaient avoir fait une erreur.
   La seconde partie de la question était une application immédiate de la première. La matrice de l'énoncé étant clairement inversible.
   Attention ici, plusieurs candidats ont voulu aller trop vite pour répondre à cette question, il était en particulier nécessaire de vérifier que les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire proposée étaient non nuls.
7. [25, 42 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait de montrer que (i), la somme des dimensions était égale à $n+1$ et (ii), que l'intersection des deux espaces était réduite à $\{0\}$, ce que plusieurs candidats ont bien su expliquer et que nous avons valorisé. Pour obtenir tous les points de la première partie, il était en revanche nécessaire d'avoir fourni des arguments convaincants aux questions 1.2 et 1.4.
   Nous avons vu quelques dizaines de copies confondre réduit à $\{0\}$ et égal à $\emptyset$ dans la seconde partie, ce qui était plus grave.

Exercice 2. Le deuxième exercice proposait une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass. La notion de continuité uniforme était évitée en supposant les fonctions $\mathcal{C}^1$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis et d'avoir une vitesse de convergence.

L'exercice était décomposé en trois parties. La première étudiait une fonction classique sur un intervalle borné. La seconde permettait de tester quelques notions élémentaires du cours de probabilité. La troisième constituait le coeur de la preuve et utilisait des raisonnement plus fins d'analyse et des outils plus raffinés du cours de probabilité.

L'exercice a été assez bien réussi par les candidats qui y ont obtenu près de la moitié de leurs points. Sans surprise, ces points ont essentiellement été obtenus dans les deux premières parties. Toutefois, l'exercice ne comportant pas de questions très difficiles avant la dernière, nous avons apprécié qu'un bon nombre candidats avancent loin dans l'exercice. De plus, la question sur le tracé a été mieux réussie que l'an dernier, probablement car la fonction ne dépendait pas d'un paramètre libre.

Le gros point noir de l'exercice a été la question 1.2 qui était pourtant une application directe de l'inégalité des accroissements finis à une fonction classique. Ce résultat important du cours d'analyse était maîtrisé très approximativement par l'essentiel des candidats.

Nous avons aussi été déçu par la manipulation des limites par les candidats. Nous avons trop souvent lu $\varepsilon \to 0$ aux questions 2.10 et 2.13. ε était un réel positif dans l'énoncé, il fallait pour répondre proprement à ces questions revenir à la définition d'une limite.

1. [213, 153 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait d'étudier les variations de la fonction f sur $[0,1]$, ce qui ne posait pas de réelles difficultés quand on obtenait une formule correcte pour la dérivée. Les candidats se sont même montrés à l'aise avec les fonctions trigonométriques pour étudier le signe de $\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$. Comme l'année dernière, il est toutefois dommage de voir des candidats obtenir un tableau de variation correct et ne pas ébaucher de graphe ensuite.
   Précisons enfin qu'un graphe même sommaire doit posséder les principales propriétés qualitatives de la fonction qu'il s'agit de tracer : domaine de définition, sens de variation, valeurs remarquables (valeur en 0,valeur négative en 1, et la position du

minimum : 3/4 doit être placé entre 1/2 et 1), régularité (pas de tangente verticale !). Une fois ces contraintes respectées, nous avons apprécié de voir une courbe traversant l'axe des absices en 1/2, et rester proche de 0 ensuite.

2. [51 copies $\geqslant$ 75%] Cette question d'application directe de l'inégalité des accroissements finis (et pas du théorème de Rolle) à une fonction simple sur un intervalle fixe a été particulièrement mal réussie, cela nous semble particulièrement grave. Nous répétons ici que la constante M recherchée doit être un majorant de $|f'|$, pas de f', et encore moins de f ! Ainsi, même si f' est croissante sur $[0,1]$ et que $f'(1) \geqslant 0$, il n'est pas vrai que $|f'(x)| \leqslant f'(1)$ pour tout x de $[0,1]$. Parmi les autres erreurs particulièrement graves, nous avons vu de nombreuses copies confondre le taux d'accroissement de la fonction f et sa dérivée. Attention aussi, il n'est pas vrai que pour tout x, $\sin(x) + \cos(x) \leqslant 1$ ou pire, est égal à 1 ! !
4. [276 copies $\geqslant$ 75%] Cette question d'application du cours de probabilité a été une réussite, l'essentiel des candidats connaissant le résultat. En revanche, pour ne pas perdre de points, il fallait bien rappeler toutes les hypothèses sous lesquelles une somme de loi de Bernoulli est une loi binomiale. Nous encourageons aussi les candidats à éviter autant que possible l'utilisation de notations même classiques quand elles ne sont définies ni dans l'énoncé, ni dans la copie. Ainsi, les candidats qui utilisaient q sans préciser $q = 1 - p$ ont perdu quelques points. On a vu plusieurs copies calculer la valeur de l'espérance et de la variance. Ce calcul est nécessaire si la loi n'a pas été trouvée mais inutile lorsque la question est ainsi formulée. Il est inutile de perdre du temps ici à justifier ce résultat quand il n'est pas demandé. Attention, S_n n'est ni égal à $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ni à la somme de ces termes.
5. [141 copies $\geqslant$ 75%] L'inégalité a curieusement posé des problèmes à plusieurs copies qui avaient pourtant la bonne variance pour S_n, alors qu'il suffisait de montrer que $p(1-p) \leqslant 1/4$. Ce genre de questions permet clairement de différencier les candidats capables de mener un raisonnement simple de ceux qui se contentent d'apprendre des formules du cours sans y mettre de sens.
6. [157 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait d'appliquer le théorème de transfert, ce que l'essentiel des candidats a remarqué. En revanche, il fallait soit écrire $\mathbb{E}\left(f(\overline{X}_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(S_n/n)\right)$ et l'appliquer à S_n en utilisant la première question, soit déterminer la loi de $\overline{X}_n$ à partir de celle de S_n et l'appliquer (correctement) à $\overline{X}_n$. Nous avons ainsi lu, sans explications et dans une majorité de copies, les égalités
$$\mathbb{E}\left(f(\overline{X}_n)\right) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \ ,$$
qui sont toutes les deux complètement fausses.
7. [194 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait dans cette question de vérifier que
$$f(p) = \sum_{k=0}^{n} f(p)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \mathbb{E}\left(f(p)\right) \ ,$$
ce que l'on pouvait faire soit en utilisant le binôme de Newton, soit en utilisant directement la loi binomiale, puis d'appliquer la question précédente.

   Attention ici, il ne suffisait pas ici d'évoquer un argument vague comme nous avons pu lire "on fait rentrer $f(p)$ dans la somme" sans précisions.
8. [93 copies $\geqslant$ 75%] La première partie de la question se déduisait de la définition de S_1 et de la question 1.2, la seconde s'obtenait en insérant la borne obtenue dans la somme avec l'inégalité triangulaire, puis en utilisant par exemple le binôme de Newton pour conclure. Cette question a été bien rédigée par un bon nombre de candidats. Même si elle n'était pas très difficile elle demandait de bien avoir suivi

le raisonnement proposé dans le problème et de savoir aller chercher les résultats pertinents des questions précédentes.

L'erreur la plus commune a été parmi les candidats ayant résolu la première partie de la question de majorer ensuite $\varepsilon\mathbb{P}\left(S_n = k\right)$ par ε avant de sommer. La somme de termes inférieurs à ε n'est pas en général majorée elle même par ε.

9. [13 copies $\geqslant 75\%$] Il s'agissait d'utiliser la question 1.2 pour majorer $|f(k/n) - f(p)|$ par $M\,|k/n - p|$ puis le fait que k/n et p étaient des réels de $[0, 1]$ pour majorer la valeur absolue de leur différence par 1. Il suffisait alors d'utiliser la définition de la probabilité de l'évènement $\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M$ pour conclure.

   Cette question plus difficile a posé beaucoup de problèmes aux candidats puisque seuls 13 candidats y ont obtenu une bonne note sur la grosse centaine l'ayant tentée. Il semble que plusieurs aient buté sur le calcul de la probabilité $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right)$ ce qui était pourtant a priori la partie la plus simple de la question.

10. [20 copies $\geqslant 75\%$] La question était une conséquence immédiate de la loi faible des grands nombres et des deux questions précédentes. Seule une poignée de candidats a été capable de rédiger cette question proprement, ce qui est plutôt décevant puisqu'il suffisait d'écrire proprement la définition de la limite.

    En particulier, nous avons trop souvent lu ici $\varepsilon \to 0$, ce qui est parfaitement faux. Dans l'énoncé, ε est clairement un réel strictement positif !

11. [173 copies $\geqslant 75\%$] Grâce à l'indication de l'erratum, cette question devenait une application directe et a donc permis à bon nombre de candidats d'aller chercher des points ici. Cette question aurait clairement du être située plus tôt dans l'énoncé pour éviter le grappillage.

    Il suffisait donc pour obtenir tous les points bien vérifier que toutes les hypothèses nécessaires à l'application de l'inégalité étaient vérifiées et calculer proprement l'espérance de $\overline{X}_n$. Nous avons sanctionné les rédactions trop rapides ici.

— 12.[3 copies $\geqslant 75\%$] C'était la question la plus difficile techniquement. Il s'agissait d'optimiser en ε la borne résultant des questions 2.8 et 2.11 (conjuguée à 2.4), ce que seules des copies excellentes ont pensé à faire. La fautes la plus courante dans les copies ayant abordé cette question a été de compiler simplement ces deux bornes et de mettre en facteur le $(M^2/n)^{1/3}$, la "constante" obtenue étant alors une quantité dépendant des paramètres du problèmes n, ε. Rappelons que lorsque nous demandons une constante numérique, nous attendons un réel en réponse.

— 13.[19 copies $\geqslant 75\%$] Bien que située en fin de problème, cette question était une application immédiate de la précédente pour peu qu'on remarque que Q_n était une suite de polynôme. Il suffisait alors de dire que la question 2.12 montrait que le supremum de la différence était bien majoré par une quantité de limite nulle.

  Plus de 80 candidats ont abordé cette question, ils ont en général oublié de prendre le supremum avant de passer à la limite.

— 14.[1 copie $\geqslant 75\%$] Cette question nécessitait un grand recul sur l'exercice. Il fallait remarquer que la seule propriété de la fonction f utilisée dans la preuve venait de la majoration obtenue en question 1.2 qui était valable pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$, quitte à modifier la constante M. Nous tenons à féliciter ici le candidat qui a parfaitement su expliquer cette preuve dans sa copie et à mentionner l'autre candidat qui a abordé très sérieusement cette question. Il est extrêmement agréable de corriger ces copies de grande valeur capables dans le temps de l'examen de mener en fin de problème des raisonnements si fins.

Exercice 3. Il s'agissait de montrer dans cet exercice par l'absurde qu'un réel β était un entier seulement si $n^\beta \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cet exercice plus original et moins calculatoire a été comme attendu le moins réussi par les candidats qui n'y ont obtenu qu'environ 20% de leurs points sur le tiers que leur réservait

le barème. C'est toutefois celui sur lequel nous avons eu le plus de bonnes surprises. Quelques copies de candidats visiblement très faibles sur les calculs même élémentaires ont pu s'exprimer dans un registre un peu différent et obtenir une note convenable.

Plusieurs questions se résolvaient par récurrence (4 (a) et (b), 5 (b), éventuellement 1 et 2). Certaines très simples (1 et 2) ont été pourtant mal rédigées dans l'ensemble. Ainsi, on ne peut pas montrer par récurrence la proposition "f est de classe $\mathcal{C}^k$" sans utiliser la définition de la fonction f. La question 4(b) beaucoup plus délicate exigeait une rédaction impeccable.

Rappelons qu'il est inutile de considérer les cas $n = 1$ et $n = 2$ pour initialiser une récurrence simple.

Parmi les erreurs très classiques de rédaction, rappelons que, pour démontrer l'hérédité, il ne faut pas supposer a priori la propriété vraie "pour tout n", sans quoi il n'y a rien à prouver. Enfin, il est toujours désagréable de lire une preuve se terminant par "OK" .

Toutefois, il est tout à fait possible de résoudre des questions de la forme "montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ..." sans utiliser de récurrence. Ainsi, les questions 1 et 5(a) se résolvaient très bien directement. Il est toujours dommage de voir des candidats perdre du temps à écrire de longs préambules pour raconter un tel raisonnement et finalement proposer une preuve de l'hérédité n'utilisant pas l'hypothèse de récurrence.

1. [160 copies $\geqslant$ 75%] Il suffisait d'écrire $f(x) = e^{\alpha \ln x}$ puis de dire que ln était $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et que exp était $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (le fait que exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ n'était pas suffisant).

   D'autres ont raisonné par récurrence pour montrer la propriété "f est de classe $\mathcal{C}^k$ et $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$ et résoudre d'un coup les questions 3.1 et 3.2 ensemble, ce qui était parfaitement possible.

   En revanche, plusieurs candidats ont cherché à montrer par récurrence la propriété "f est de classe $\mathcal{C}^k$" dont l'hérédité ne peut être prouvée sans utiliser la définition de f car elle entrainerait que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est $\mathcal{C}^\infty$.

   Curieusement, quelques dizaines de candidats ont voulu justifier que f était $\mathcal{C}^\infty$ par le fait que la dérivée ne devenait pas identiquement nulle. La fonction identiquement nulle est de classe $\mathcal{C}^\infty$!
2. [160 copies $\geqslant$ 75%] Cette question pouvait par exemple se démontrer par récurrence. Attention alors à proposer la bonne formule pour $f^{(k)}$.

   Un grand nombre de candidats a utilisé la notation $\alpha!$ alors que α n'est pas entier. Cette notation, en plus de ne pas être définie dans ce cas, est très dangereuse ici car certaines dérivées étaient négatives.

   De même, on ne peut appliquer la binôme de Newton pour calculer $(a+b)^\alpha$ lorsque α n'est pas entier.
3. [172 copies $\geqslant$ 75%] Cette question était une application immédiate de l'égalité des accroissements finis qui a été beaucoup mieux traitée que la question 2.2. Ceci est plutôt étonnant puisqu'il fallait en outre s'approprier la notation f_1.

4.(a) [200 copies $\geqslant$ 75%] La récurrence, immédiate ici a été plutôt bien rédigée. Attention toutefois à ne pas supposer pour montrer l'hérédité que la propriété est vraie pour tout n.

4.(b) [7 copies $\geqslant$ 75%] Sans surprise, cette question plus délicate a été moins bien réussie. La plus simple était de raisonner par récurrence sur k pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^k$. On appliquait d'abord la question 3 à la fonction g_{k-1} puis la question 4a) pour appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction g' en le point x_1 de l'intervalle $[x, x+1]$ obtenu.

5.(a) [44 copies $\geqslant$ 75%] Cette question ne demandait de raisonnement par récurrence. Il suffisait de combiner les questions 3.2 et 3.4b) et d'utiliser la définition de k. Il est toujours dommage de voir les candidats proposer de tels raisonnements démontrer l'hérédité sans utiliser l'hypothèse de récurrence.

5.(b) [22 copies $\geqslant$ 75%] Seuls les bons candidats ont abordé sérieusement cette question, en général avec succès.

5.(c) [73 copies $\geqslant$ 75%] Cette question, qui résumait les résultats des 2 questions précédentes a permis à plusieurs candidats de grappiller quelques points. Il s'agissait en fait de mettre en évidence la conclusion absurde à laquelle menait l'hypothèse du début de la question 5. Très peu de candidats s'en sont aperçus.

5.(d) [3 copies $\geqslant$ 75%] Le sens direct $\beta \in \mathbb{N}$ implique $n^\beta \in \mathbb{N}$ a été bien abordé par une quarantaine de candidats qui n'ont pas manqué là encore de récupérer quelques points. Bien plus rares sont ceux qui ont su tirer partie de la question précédente. Signalons toutefois notre plaisir là encore d'avoir vu 3 candidats très bien conclure ce problème.